Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2011 / 2012
Prof. Dr. Sven Beuchler
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt zur Wiederholung Teil 1.

Abgabe am -.

Aufgabe 1. a) Was ist eine B-adische Darstellung mit fixer Länge ω für natürliche Zahlen?

b) Man stelle die Zahlen $x = 21$ und $y = 14$ in einer 2-adischen Darstellung mit $\omega = 5$ dar.

c) Man stelle die Zahl $x + y$ in einer 2-adischen Darstellung mit $\omega = 5$ dar. Was tritt auf?

Aufgabe 2. Es sei $B, t \in \mathbb{N}$, $B > 1$. Was ist eine Gleitkommazahl zur Basis B mit Mantissenlänge t? Es sei $G_{10,3,-5,5}$ ein Gleitkommasystem.

a) Man berechne $rd(x)$ für $x = 0.2176$.

b) Man berechne $x \tilde{+} y$ für $x = 0.218$ und $y = -1.74$.

Aufgabe 3. Es sei $x \in \mathbb{R}$ ein exakter Wert und $\tilde{x}$ die gestörten Daten. Definieren Sie absoluten und relativen Fehler. Weiterhin sei $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Wie pflanzt sich der relative Fehler für $\tilde{x} \to x$ von $\phi(\tilde{x})$ gegenüber $\phi(x)$ fort?

Aufgabe 4. Es seien die Zahlen

$$7 \quad 9 \quad 3 \quad 2 \quad 12 \quad 8 \quad 4 \quad 1$$

zu sortieren. Demonstrieren Sie die folgenden Verfahren anhand obigen Beispiels.

a) Mergesort,

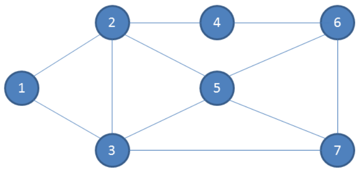
b) Quicksort,

c) Heapsort,

d) Bubblesort.

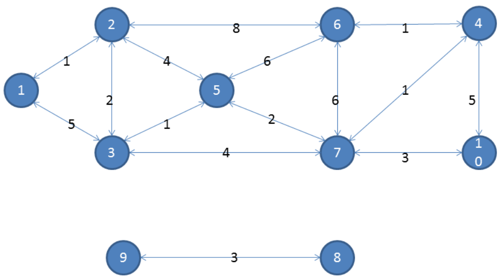
Geben Sie jeweils möglichst gute Abschätzungen für die mittlere Laufzeit und den Speicherplatz der entsprechenden Verfahren an.

Aufgabe 5. Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph. Man gebe 6 äquivalente Definitionen, daß G ein Baum ist.



Man demonstriere Tiefen- und Breitensuche anhand des obigen Graphen mit Startknoten 1.

Aufgabe 6. Wir betrachten den folgenden gewichteten Graphen:

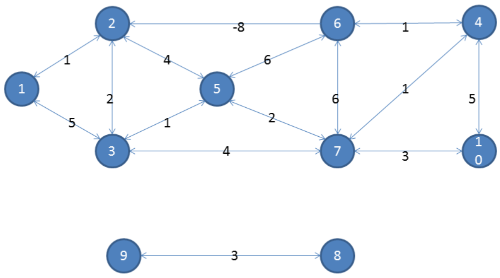


a) Man berechne mit dem Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Weglängen zu allen Knoten von Knoten 1 und gebe für den Knoten 4 den kürzesten Weg an.

b) Welche Voraussetzungen müssen für den Algorithmus von Dijkstra an die Gewichtsfunktion gestellt werden?

c) Welche Komplexität besitzt der Algorithmus von Dijkstra?

Aufgabe 7. Wir betrachten den folgenden gewichteten, gerichteten Graphen:



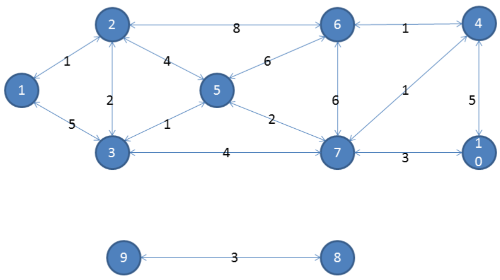
a) Kann man den Algorithmus von Dijkstra zur Berechnung kürzester Wege auf diesen Graphen anwenden?

b) Enthält der Graph negative Zyklen?

c) Man berechne die kürzesten Weglängen zu allen Knoten von Knoten 1 und gebe für den Knoten 3 den längsten Weg an.

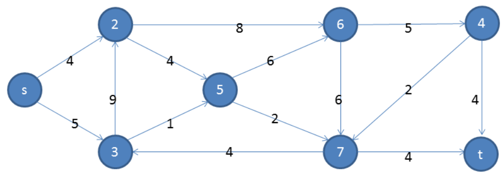
d) Welche Komplexität besitzt der Algorithmus von Floyd-Warshall?

Aufgabe 8. Wir betrachten den folgenden gewichteten Graphen:



Man bestimme mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimal spannenden Baum.

Aufgabe 9. Wir betrachten das folgende Netzwerk $N = (G, c, s, t)$.



a) Man definiere die Begriffe Netzwerk, $s - t-$Fluß in einem Netzwerk, Schnitt, minimaler Schnitt.

b) Wie lautet das max flow min cut Theorem?

c) Man berechne mit dem Edmond-Karps-Algorithmus den maximalen $s - t$-Fluß in obigem Netzwerk.

Aufgabe 10. Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher, ungerichteter Graph.

a) Was ist der Grad einer Ecke?

b) Man zeige die folgende Aussage: Durch Orientierung aller Kanten in G kann G ganau dann zu einem gerichteten Graphen $\tilde{G}$ mit $|\delta^+(v)| = |\delta^-(v)|$ für alle $v \in V$ transformiert werden, wenn alle Ecken geraden Grad haben.

Aufgabe 11. Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher, ungerichteter Graph.

a) Was ist ein Kreis in G?

b) Man zeige, daß G durch Orientierung aller Kanten in G zu einem gerichteten Graphen $\tilde{G}$ für alle $v \in V$ transformiert werden kann, sodaß $\tilde{G}$ keinen Kreis besitzt.

Aufgabe 12. Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph.

a) Wann heißt G bipartit? Was ist ein Matching M?

b) G heißt k-regulär, falls $|\delta(v)| = k$ für alle $v \in V$. Man zeige, daß jeder bipartite k-reguläre Graph ein perfektes Matching besitzt, falls $k \geq 1$.

Aufgabe 13. (Code-Verständnis)

Notieren Sie die Bildschirmausgabe, die nachfolgendes Code-Fragment erzeugt:

```
for (int i=0; i<10; i++)
{
    if ((i%2)==0)
       printf("%d\n",i);
}
```

Aufgabe 14. (Code-Verständnis)

Notieren Sie die Bildschirmausgabe, die nachfolgendes Code-Fragment erzeugt:

```
for (int i=10; i>0; i--)
{
    int j = i * 2;
    if (j > 5)
       printf("%d\n",j);
}
```

Aufgabe 15. (Code-Verständnis)

Notieren Sie die Bildschirmausgabe, die nachfolgendes Code-Fragment erzeugt:

```
for (int i=0; i<4; i++)
{
    for (int j=0; j<4; j++)
    {
        if (((i+j)%2)==0)
           printf("(%d,%d)\n",i,j);
    }
}
```

Programmieraufgabe 1. (Spannweite einer Zahlenfolge)

In der Statistik interessiert man sich gelegentlich für die *Spannweite* einer gegebenen Folge $x_i,\ i = 0, ..., n-1$ von n Zahlen. Die Spannweite S ist hierbei als die Differenz vom größten und kleinsten Wert gegeben:

$$S = \max_i x_i - \min_i x_i$$

Schreiben Sie eine Funktion `double spannweite(double* x, int n)`, die zu einem Array `x` der Länge `n` die Spannweite berechnet und als Rüchgabewert liefert.

Hinweis:

Im Rahmen dieser Aufgabe darf Pseudo-Code verwendet werden. Unter Pseudo-Code verstehen wir hierbei C/C++ – artigen Code, bei dem insbesondere Konstrukte wie `if`-Abfragen, Schleifen, Zuweisungen und arithmetischen Operationen verwendet werden sollen. Auf den Array-Eintrag i eines Arrays `double* x` wird entweder über die mathematische Schreibweise x_i oder die C-Schreibweise `x[i]` zugegriffen. Das erste Element eines Arrays `x` ist `x[0]`.

Der Einsatz der `pow`/`exp`-Funktion sowie die Verwendung von anderen in C definierten oder über Header-Dateien einbinbaren Mathematik-Funktionen ist **nicht** gestattet. Ebenso sind **keine** Mengenschreibweisen oder mathematische Schreibweisen (z.B. $\sum$, $\prod$, !) gestattet. Selbstverständlich darf auch reines C oder C++ als Programmiersprache verwendet werden. Kleinere syntaktische Fehler führen hier nicht zum Punktabzug, solange der eigentliche Algorithmus verständlich ist.