



Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2011 / 2012

Prof. Dr. Sven Beuchler

Peter Zaspel



Übungsblatt 7.

Abgabe am **12.12.2011**.

Am Mittwoch, dem 07.12.2011 ist Dies Academicus. An diesem Tag fällt die Vorlesung sowie die Übungsblatt-Abgabe aus. Statt dessen wird der Übungszettel am Montag, dem 12.12.2011 abgegeben. Dennoch wird am Mittwoch, dem 07.12. wieder ein neues Aufgabenblatt erscheinen, das dann wie gewohnt am Mittwoch, dem 14.12. abzugeben ist.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Es sei $G(V, E, \omega)$ ein gerichteter gewichteter Graph ohne negative Zahlen. $v, u \in V$ und P ein kostenminimaler Kantenzug (also minimal bzgl. ω) von v nach u . Dann gibt es in G einen $v - u$ -Weg W mit $\omega(W) \leq \omega(P)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Kürzester Weg)

- a) Wenden Sie den Dijkstra-Algorithmus zum Suchen eines kürzesten Weges wie in der Vorlesung beschrieben auf den Graphen auf Seite 10 des PDFs mit Beispielgraphen an. Starten sie beim roten Knoten und verwenden Sie den gelben Knoten als Zielknoten. (Benennen sie alle Knoten geeignet.)
- b) Verwenden Sie erneut den Graph auf Seite 10. Starten Sie ebenfalls beim roten Knoten und laufen Sie zum gelben Knoten. Diesmal ersetzen Sie allerdings die Kantengewichte mit dem Wert 2 durch -2 . Da wir hier nun auch negative Gewichte haben, muss der Bellman-Ford-Algorithmus verwendet werden um den kürzesten Weg zu berechnen. (Benennen sie alle Knoten geeignet.)

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Floyd-Warshall)

Wenden Sie nun den Floyd-Warshall-Algorithmus an um kürzeste Wege für alle Paare von Knoten des Graphens auf Seite 8 des PDFs zu bestimmen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Kruskal)

Interpretieren Sie den Graphen von Seite 10 als ungerichteten Graphen um und bestimmen Sie den minimalen Spannbaum.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Kürzeste-Wege-Probleme)

In dieser Programmieraufgabe werden wir die den Dijkstra-Algorithmus und den Bellman-Ford-Algorithmus zur Bestimmung kürzester Wege implementieren. Es soll hierbei stets die Implementierung der Adjazenzmatrizen über CSR-Matrizen erfolgen, so wie es auf dem vorangegangenen Übungsblatt eingeführt wurde.

Die Teilaufgaben a) - f) ergeben zusammen 75% der Punkte.

- a) Implementieren Sie den Dijkstra-Algorithmus zur Berechnung kürzester Wege auf gerichteten Graphen, so wie er in der Vorlesung eingeführt wurde. Für die Menge Q können Sie in dieser Teilaufgabe einen Boolean-Vektor-Verwenden. Sie speichern also die Wahrheitswerte `true` oder `false` in Abhängigkeit davon, ob der jeweilige Knoten in der Menge Q enthalten ist. Den Vektor l sollten Sie einfach als Array implementieren.
- b) Testen Sie das Verfahren auf Korrektheit mit dem Graphen aus Theorie-Aufgabe 2 a) (mit dem gleichen Startknoten) und führen Sie wie immer den *valgrind*-Test durch.
- c) Erweitern Sie zwei der drei erzeugten Graphen aus der vorangegangenen Programmieraufgabe (Binärbaum, 2D-Gitter) um randomisierte nicht-negative Kantengewichte. Achten Sie hierbei darauf, dass wir nun die Beispielgraphen als gerichtete Graphen mit ggf. verschiedenen Gewichten pro Kantenrichtung verstehen. Führen Sie auf diesen Graphen die Kürzeste-Wege-Suche (von der Wurzel zu einem Blatt / von links oben nach rechts unten) durch und messen und plotten Sie wie gewohnt die Laufzeit.
- d) Implementieren Sie nun den Bellman-Ford-Algorithmus.
- e) Testen Sie ihn an dem Graphen aus Theorieaufgabe 2 b) und verwenden Sie ebenfalls *valgrind*.
- f) Arbeiten Sie nun die beiden Beispielgraphen (Baum, 2D-Gitter) derart um, dass auch negative Kantengewichte existieren, aber keine negativen Zyklen entstehen. (Der Einfachheit halber kann man beispielsweise im 2D-Gitter die Kanten nach rechts und unten jeweils als ausgehende Kanten definieren und die anderen beiden Kanten als eingehende Kanten.) Testen Sie wie gewohnt die Laufzeiten und plotten Sie sie.
- g) Erweitern Sie den Dijkstra-Algorithmus derart, dass die Menge Q über einen Binär-Heap gegeben ist und messen Sie die daraus resultierende Laufzeit anhand der Beispielgraphen.

(15 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools in der Woche vom 12.12. bis 16.12.2011. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängt in der Woche vom 05.12. bis 09.12.2011 aus.