Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2011 / 2012
Prof. Dr. Sven Beuchler
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **25.01.2012**.

Dies ist der letzte Zettel der in die Wertung für die Zulassung zur Klausur mit eingeht.

Wichtig: Die Abgabe der Programmieraufgaben soll diesmal derart durchgeführt werden, dass die jenigen Studenten, die auf den Zetteln 1 bis **12**(!) schon **mehr** als 50% Prozent der Programmier-Punkte haben, erst ab dem Nachmittag, des 26.01.2012 ihre Programmieraufgaben (freiwillig) vorstellen. Alle anderen, also jene Studenten, die weniger als 50% Prozent der Programmier-Punkte auf den Übungszetteln 1 bis 12 haben, **müssen** bis spätestens 26.01.2012, Mittags, ihre Programmieraufgaben vorgeführt haben. Sollte dies bei den betreffenden Studenten zu (terminlichen) Problemen führen, wenden diese sich bitte umgehend an die CIP-Pool-Tutoren.
Die Listen hängen wie gewohnt in den Pools bis zum 24.01.2012 aus.

Aufgabe 1. (Erwartungswert)

Es seien X, Y diskrete Zufallsgrößen, $a, b \in \mathbb{R}$. Zusätzlich mögen $E(X), E(Y)$ exisiteren. Zeigen Sie

a) $E(aX + b) = aE(X) + b$

b) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

c) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

d) $D^2(aX + b) = a^2 D^2 X$

e) $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Hinweis: Falls $\sum_i |x_i| p_i < \infty$ ($p_i := P(X = x_i)$), so gilt

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega).$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Gegeben sei eine Zufallssituation mit dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{A}, P)$. Wir betrachten ein festes, zufälliges Ereignis $A \in \mathbb{A}$ und realisieren die Zufallssituation in n Versuchen. Dabei definieren wir für $i = 1, 2, ..., n$ die Zufallsgrößen

$$X_i = \begin{cases} 1, & A \text{ tritt im } i\text{-ten Versuch ein,} \\ 0, & A \text{ tritt im } i\text{-ten Versuch nicht ein} \end{cases}$$

vom Typ i.i.d. mit

$$P(A) = p, \quad E(X_i) = p, \quad D^2(X_i) = p(1-p).$$

Wir wissen nun, dass für die relative Häufigkeit $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ von A $E(\bar{X}_n) = p$ und $D^2(\bar{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$ gilt. Bestimmen Sie die notwendige Zahl an Versuchen, damit die relative Häufigkeit mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 95% und einem Fehler von maximal 0.5% mit der Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$ übereinstimmt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. Bei Fantasy-Abenteuer-Spielen werden häufig Würfel benutzt, die mehr als 6 Seiten haben. Geben Sie zu den nachfolgenden Beispielen den Wahrscheinlichkeitsraum, die Zufallsgrößen, die Verteilung, die Erwartungswerte und die Varianzen an:

a) W_7 ist ein siebenseitiger Würfel, wobei die Augenzahlen aus der 1 und den ersten sechs Primzahlen bestehen.

b) W_{12} ist ein zwölfseitiger Würfel, wobei die Augenzahlen die ersten zwölf ungeraden Zahlen sind.

c) W_6 ist ein sechsseitiger Würfel, der 2,4,4,6,6,6 als Augenzahlen hat.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. Um die allgemeine Popularität der Tutoren unter den Studenten auszunützen und nebenbei auch noch Geld in die klammen Kassen zu spülen, entschließt sich die Universität dazu Päckchen zu verkaufen. Jedes dieser Päckchen enthält jeweils genau einen der acht verschieden All-Time-Best-Ever Tutoren als Plastikfigur. Da keiner der Studenten jemals wieder ein glückliches Leben führen kann wenn er nicht alle acht Figuren besitzt und niemand Figuren tauscht, stellt sich die Frage wie viele Packungen im Schnitt von den Studenten gekauft werden müssen, bis sie einen kompletten Satz von acht verschiedenen Figuren gesammelt haben? (Die verschiedenen Figuren sind mit gleicher Häufigkeit in den Packungen vertreten.) Bitte geben Sie neben dem Erwartungswert auch den Wahrscheinlichkeitsraum, die zu untersuchende Zufallsvariable und deren Verteilung an.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. a) Implementieren Sie einen Fibonacci-Zufallszahlen-Generator, der zu einem gegebenen Startwert und einer großen Zahl m eine Zufallsfolge generiert.

b) Schreiben Sie nun dazu ein Programm, dass eine große Zahl an Punkten mit dreidimensionalen Koordinaten (alle drei Einträge zufällig, gleichverteilt aus dem Intervall $[0, 1]$) generiert und plotten Sie diese Punkte für unterschiedliche Werte von m mit `gnuplot`. Sie sollten erkennen, dass die generierten Punkte nicht gleichverteilt im Einheitswürfel liegen.

c) Sei nun $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment: Wähle gleichverteilt ein Element (x, y) aus $\Omega = \{0, ..., N\} \times \{0, ..., N\}$. Die Zufallsvariable Z sei nun 1, falls $x^2 + y^2 \leq N^2$, andernfalls sei Z gleich 0.

- Schreiben Sie ein Routine, die den Erwartungswert und die Varianz von Z berechnet. Hier verwenden Sie nun den Zufallszahlen-Generator aus der vorangegangenen Teilaufgabe. Offensichlich werden Zahlen $0, ..., m-1$ generiert. (Setzten Sie im Zufallszahlengenerator nun $m = 2^{32}$.)
- Schreiben Sie eine Routine, die das obige Zufallsexperiment k-mal durchführt und Mittelwert sowie Varianz ausgibt.
- Führen Sie k Versuche durch, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit p der Mittelwert der Simulation auf 3 bzw. 6 Nachkommastellen genau ist! Geben Sie k und das Ergebnis an für $p = 0.90$, sowie $p = 0.99$.

(15 Punkte)